

OYAK  
TÜBİTAK BİLİM İNSANI DESTEKLEME DAİRE BAŞKANLIĞI

**9. OYAK MATEMATİK YARIŞMASI**  
İL BİRİNCİLİĞİ SINAVI

ADANA - BALIKESİR - BATMAN - BOLU - DÜZCE  
HATAY - KAHRAMANMARAŞ - KOCAELİ - MARDİN - ORDU  
RİZE - SAKARYA - SİVAS - TEKİRDAĞ - ZONGULDAK

27 KASIM 2010

---

**SORULAR**

---

1.  $x^3 + 5x^2 - 7x - 6 = 0$  ve  $x^4 - x^3 - x - 1 = 0$  denklemlerinin ikişer köklerinin ortak olduğu bilinmektedir. Bu ortak kökleri bulunuz.
2.  $|AB| = 6$ ,  $|AC| = 10$  olan bir  $ABC$  üçgeni veriliyor. Bu üçgenin  $[AC]$  kenarı üzerinde  $|AP| = 8$  olacak şekilde bir  $P$  noktası alınıyor. Bu noktadan  $AC$  kenarına çizilen dik, üçgenin çevrel çemberinin  $A$  noktasını içermeyen  $BC$  yayını  $R$  noktasında kesiyor.  $AR$  doğrusu ile  $BC$  kenarı  $S$  noktasında kesişiyorlarsa  $\frac{|BS|}{|SC|}$  oranını bulunuz.
3.  $a^4 + 2a^2 - 4 = 5 \cdot 2^b$  eşitliğini sağlayan tüm  $a, b$  tam sayılarını bulunuz.
4.  $2 \times 8$  boyutlarında bir dikdörtgen oluşturacak şekilde dizilen 16 birim kareden her biri beyaz, mavi, yeşil veya kırmızı renklerinden birisi ile boyanacaktır. Ortak bir kenara sahip birim karelerin aynı renkte olmaması koşulu ile yapılacak kaç farklı boyama şeklinde her renk en az bir kez kullanılmış olur?

---

Süre 3 saattir.

Her soru 10 puan değerindedir.

---

## ÇÖZÜMLER

---

1. Öklit algoritması kullanarak  $x^4 - x^3 - x - 1$  ve  $x^3 + 5x^2 - 7x - 6$  polinomlarının en büyük ortak bölenini bulalım;

$x^4 - x^3 - x - 1$  polinomunu  $x^3 + 5x^2 - 7x - 6$  polinomu ile bölerek

$$x^4 - x^3 - x - 1 = (x^3 + 5x^2 - 7x - 6)(x - 6) + 37(x^2 - x - 1)$$

eşitliğini,

$x^3 + 5x^2 - 7x - 6$  polinomunu  $x^2 - x - 1$  polinomu ile bölerek de

$$x^3 + 5x^2 - 7x - 6 = (x^2 - x - 1)x + 6(x^2 - x - 1) = (x^2 - x - 1)(x + 6)$$

eşitliğini elde ederiz. Bu durumda soruda verilen iki polinomun en büyük ortak bölenlerinin  $x^2 - x - 1$  olduğu görülür. Bu ortak bölenin kökleri de  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  ve  $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$  dir.

### İkinci Çözüm:

İki denklemin ortak olan iki kökünü sağlayan denklem  $x^2 + ax + b$  olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} 0 = x^3 + 5x^2 - 7x - 6 &= (x^2 + ax + b) \left( x - \frac{6}{b} \right) \\ 0 = x^4 - x^3 - x - 1 &= (x^2 + ax + b) \left( x^2 + cx - \frac{1}{b} \right) \end{aligned}$$

denklemlerinden, katsayıları eşitliyerek,

$$\begin{aligned} 5 &= \frac{-6}{b} + a \\ -7 &= \frac{-6a}{b} + b \\ -1 &= c + a \\ 0 &= -\frac{1}{b} + ac + b \\ -1 &= -\frac{a}{b} + bc \end{aligned}$$

denklemlerini elde ederiz. Gerekli işlemler yapılarak,  $a = b = -1$ ,  $c = 0$  elde edilir. Bu durumda ortak çarpan  $x^2 - x - 1$  bir başka deyişle ortak kökler  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  ve  $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$  dir.

### Üçüncü Çözüm:

$x^3 + 5x^2 - 7x - 6 = 0$  denkleminin kökleri  $\alpha, \beta, a$ ,

$x^4 - x^3 - x - 1 = 0$  denkleminin kökleri de  $\alpha, \beta, b, c$  olsun.

Vieta formülüne göre;

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + a &= -5 \\ \alpha\beta + \beta a + a\alpha &= -7 \\ \alpha\beta a &= 6 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + b + c &= 1 \\ \alpha\beta + \alpha b + \alpha c + \beta b + \beta c + bc &= 0 \\ \alpha\beta b + \alpha\beta c + abc + \beta bc &= 1 \\ \alpha\beta bc &= -1\end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Gerekli işlemler yapılarak ortak kökler  $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  ve  $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$  olarak bulunur.

### Dördüncü Çözüm:

$x^4 - x^3 - x - 1$  ifadesine  $x^2$  terimini çıkarıp eklersek,

$$x^4 - x^3 - x^2 + x^2 - x - 1 = x^2(x^2 - x - 1) + (x^2 - x - 1) = (x^2 + 1)(x^2 - x - 1) = 0$$

buluruz. Bu denklemin kökleri  $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ,  $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ ,  $x_3 = i$  ve  $x_4 = -i$  dir.  $i^3 + 5i^2 - 7i - 6 = -i - 5 - 7i - 6 = -11 - 8i \neq 0$  olduğundan  $i$  (ve  $-i$ ) karmaşık sayıları  $x^3 + 5x^2 - 7x - 6 = 0$  denkleminin kökü değildir ve bu yüzden ortak kök olamazlar. Bu durumda ortak kökler  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  ve  $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ , bir başka deyişle ortak çarpan  $x^2 - x - 1$  dir.

## 2. Çevrel çemberde aynı yayı gördükleri için

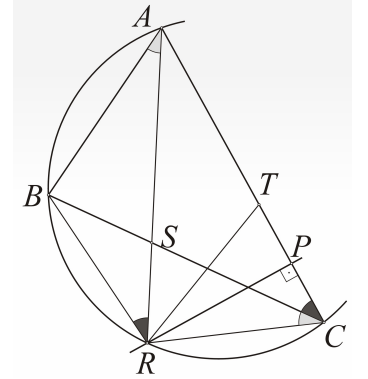
$$m(\widehat{BAR}) = m(\widehat{BCR}) \text{ ve } m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ARB})$$

eşitlikleri geçerlidir.  $[AC]$  kenarı üzerinde  $|AT| = 6$  olacak şekilde belirlenen  $T$  noktası için  $|TP| = |PC| = 2$  ve  $RP \perp TC$  dolayısıyla da  $TRC$  üçgeni bir ikizkenar üçgendir.

$$m(\widehat{RTC}) = m(\widehat{RAT}) + m(\widehat{ART}),$$

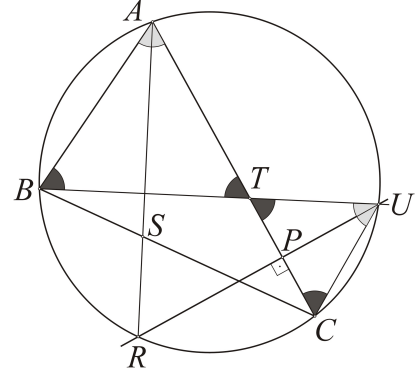
$$m(\widehat{ACR}) = m(\widehat{ACB}) + m(\widehat{BCR}) = m(\widehat{ARB}) + m(\widehat{BAR})$$

eşitliklerinden  $m(\widehat{RAT}) + m(\widehat{ART}) = m(\widehat{ARB}) + m(\widehat{BAR})$ , bir başka deyişle  $m(\widehat{ATR}) = m(\widehat{ABR})$  bulunur.  $ABRT$  dörtgeninde  $m(\widehat{ABT}) = m(\widehat{ATB})$  olduğu için  $m(\widehat{RBT}) = m(\widehat{RTB})$  ve  $|BR| = |RT|$  eşitlikleri geçerlidir. Buradan  $ABR$  ve  $ATR$  üçgenlerinin eş olduğu ve  $BAC$  açısının açıortayının  $AS$  olduğu sonucuna varılır. Açıortay teoremi kullanılarak  $\frac{|BS|}{|SC|} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{3}{5}$  sonucuna varılır.



### İkinci Çözüm:

İlk çözüme benzer şekilde  $[AC]$  kenarı üzerinde  $|AT| = 6$  olacak şekilde bir  $T$  noktası alalım.  $BT$  doğrusu üçgenin çevrel çemberini  $B$  ve  $U$  noktalarında kessin.  $m(\widehat{ABT}) = m(\widehat{ATB}) = m(\widehat{UTC})$  ve aynı yayı gördüklerinden  $m(\widehat{ABT}) = m(\widehat{TCU})$  olur. Buradan  $UTC$  üçgeninin ikizkenar üçgen ve  $UP \perp TC$  olduğu bulunur. Dolayısıyla  $U, P$  ve  $R$  doğrusaldır.



$m(\widehat{BAR}) = m(\widehat{BUR}) = m(\widehat{RUC}) = m(\widehat{RAC})$  olduğundan  $BAC$  açısının açıortayının  $AS$  olduğu bulunur. Açıortay teoremi kullanılarak  $\frac{|BS|}{|SC|} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{3}{5}$  sonucuna varılır.

3.  $b < 0$  durumunda eşitliğin sağ tarafı tam sayı olmadığı için,  $b = 0$  durumunda ise  $a^4 + 2a^2 - 4 = 5$  yani  $(a^2 + 1)^2 = 10$  ve 10 bir tam kare olmadığı için çözüm yoktur.

$b > 0$  durumunda  $5 \cdot 2^b$  sayısı bir çift sayıdır. Buna göre  $a^4 + 2a^2 - 4$  de çift olacağından  $a^4$  ve dolayısıyla  $a$  sayısının da çift olması gerekir.

$a = 2k$  alınarak soruda verilen eşitlik  $16k^4 + 8k^2 - 4 = 5 \cdot 2^b$  veya  $4k^4 + 2k^2 - 1 = 5 \cdot 2^{b-2}$  şeklinde yazılabilir. Son eşitlikte sol taraf tek sayı olduğundan sağ tarafın da tek sayı olması gerekir ve bu ancak  $b = 2$  durumunda mümkündür.  $b = 2$  için  $(a^2 + 1)^2 = 25$  olur ve buradan  $a^2 + 1 = 5$  veya  $a^2 + 1 = -5$  denklemleri elde edilir. Bir tam kare negatif olamayacağından  $a^2 = 4$  ve buradan  $a = 2$  veya  $a = -2$  bulunur.

Sonuç olarak bu eşitliği sağlayan  $(a, b)$  tam sayı çiftleri  $(-2, 2)$  ve  $(2, 2)$  olur.

### İkinci çözüm:

Eşitliği  $(a^2 + 1)^2 = 5 \cdot 2^b + 5$  şeklinde yazalım.  $b \geq 3$  için  $2^b$  sayısı 8 ile bölüldüğünden  $(a^2 + 1)^2 \equiv 5 \pmod{8}$  olur. Ancak  $\pmod{8}$  de bir tam sayının karesi sadece 0, 1 veya 4 e denk olabilir. Yani  $b \geq 3$  durumunda çözüm yoktur.  $b = 0, b = 1, b = 2$  durumları incelenerek çözüm kümesi bulunur.

4. Sorunun çözümünde ilk olarak, her rengin en az bir kere kullanılma şartını göz ardı ettiğimizde oluşan boyamaların sayısını bulacağız. Dört renk kullanıldığında ilk sütun için 12 seçenek olduğu açıktır. Herhangi bir sütun için bir boyama şekli belirlendiğinde yanındaki sütun için 7 seçenek olur. Sözelimi, 

m
b

 sütununu takip eden sütun 

b
m

, 

b
y

, 

b
k

, 

y
m

, 

y
k

, 

k
m

 veya 

k
y

 olabilir. Birinci sütundan başlayıp sütunları sırayla boyadığımızı kabul edersek, ilk sütun için 12, diğer yedi sütunun her biri için 7 seçeneğimiz olacağından dört renkli boyama şekillerinin sayısı  $12 \cdot 7^7$  dir.

Şimdi en çok üç renk kullanarak dikdörtgeni kaç farklı şekilde boyayabileceğimizi hesaplayalım. Üç renk, diyelim ki  $b, m$  ve  $y$ , belirlediğimizde, ilk sütun için 6 seçeneğimiz bulunur. Herhangi bir sütun için bir boyama şekli belirlendiğinde yanındaki sütun için 3 seçenek olur. Sözelimi, 

b
m

 sütunundan sonra 

m
b

, 

m
y

 veya 

y
b

 yer alabilir. İlk duruma benzer şekilde, ilk sütun için 6, diğer 7 sütunun her biri için 3 seçeneğimiz olacağından toplam olarak  $6 \cdot 3^7$  farklı boyama

şekli olduğunu görürüz. Öte yandan, dört renk arasından üçü  $\binom{4}{3} = 4$  farklı şekilde seçilebilir. O halde bulduğumuz sayıyı 4 ile çarpmamız gerekmektedir.

Ancak sadece iki renkten oluşan boyamalara dikkat edilmesi gerekmektedir. İki renk, diyelim ki  $b$  ve  $m$  kullanarak dikdörtgeni iki farklı şekilde boyayabiliriz. Fakat bu durumu  $(b, m, y)$  ve  $(b, m, k)$  üç renkli durumlarda saydığımız için iki kere saymış oluruz. Dolayısıyla sadece iki rengin kullanıldığı  $\binom{4}{2} \cdot 2 = 12$  durumu çıkarmamız gerekmektedir. Sonuç olarak en çok üç rengin kullanıldığı boyamaların sayısı  $4 \cdot 6 \cdot 3^7 - 12$  olarak bulunur.

Tüm durumlardan en çok üç rengin kullanıldığı durumları çıkartırsak istenen boyamaların sayısı  $12 \cdot 7^7 - 24 \cdot 3^7 + 12$  olarak bulunur.

### İkinci çözüm:

Soruyu içerme-dışarma prensibini kullanarak çözeceğiz. Tüm durumların sayısını  $N_0$ , 3 rengin kullanıldığı durumların sayısını  $N_1$  ve 2 rengin kullanıldığı durumların sayısını  $N_2$  ile gösterelim (tek rengin kullanıldığı durum yoktur). Soruda istenen boyamaların sayısı içerme-dışarma prensibinden  $N_0 - N_1 + N_2$  olur.

$$N_0 = \binom{4}{4} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7^7$$

$$N_1 = \binom{4}{3} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3^7$$

$$N_2 = \binom{4}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1^7$$

olduğundan istenen boyamaların sayısı  $12 \cdot 7^7 - 24 \cdot 3^7 + 12$  olarak bulunur.